

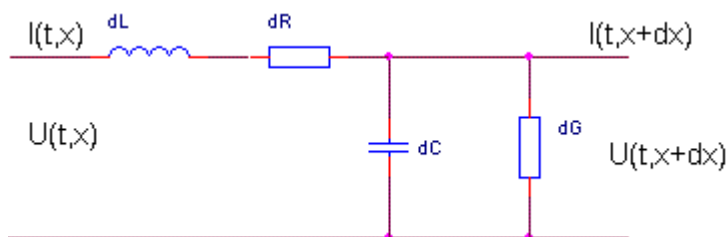
Parciální diferenciální rovnice popisující dlouhé vedení

(Telegrafní rovnice)

Napsal Ing. Josef Šroll, Ph.D.

V počátcích sdělovací techniky se informace po vedení přenášely pomocí telegrafních značek. Po vynálezu telefonu (ve rvačce o patent zvítězil Bell) tato technologie nezanikla, bylo použita pro dálkopisnou techniku, kde se pojem telegrafní značka udržel dodnes, i když dálkopisná abeceda se od naší telegrafní abecedy liší. I dnes se přenos veškerých číslicových signálů řídí dále odvozenými rovnicemi, sekundární parametry vedení (např. charakteristická impedance) jsou běžně uváděny, i když již dnes každý nezná jejich původ.

Náhradní schema elementu dlouhého vedení délky dx ve vzdálenosti x :



kde:

- dL je indukčnost elementu dlouhého vedení,
- dR je odpor elementu dlouhého vedení,
- dC je kapacita elementu dlouhého vedení,
- dG je vodivost (svod) elementu dlouhého vedení,
- dx je délka elementu dlouhého vedení,

Odvození parciální diferenciálních rovnic popisujících proud $i(t,x)$ a napětí $u(t,x)$ na dlouhém vedení:

$$-U_{(t,x)} + \Delta x L \frac{\partial i_{(t,x)}}{\partial t} + i_{(t,x)} \Delta x R + U_{(t,x+\Delta x)} = 0 \quad (1)$$

$$-I_{(t,x)} + \Delta x C \frac{\partial u_{(t,x)}}{\partial t} + i_{(t,x)} \Delta x G + I_{(t,x+\Delta x)} = 0 \quad (2)$$

Výraz $U_{(t,x+\Delta x)}$ nahradíme částí Taylorovy řady:

$$U_{(t,x+\Delta x)} = U_{(t,x)} + \frac{\partial U_{(t,x)}}{\partial x} \Delta x + \dots \quad (3)$$

kde zanedbáme všechny členy řádu 2 a vyšších

Podobně nahradíme i výraz $I_{(t,x+\Delta x)}$

$$I_{(t,x+\Delta x)} = I_{(t,x)} + \frac{\partial I_{(t,x)}}{\partial x} \Delta x + \dots \quad (4)$$

dosazením obdržíme

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + L \frac{\partial i(t,x)}{\partial t} + Ri(t,x) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + C \frac{\partial i(t, x)}{\partial t} + Gi(t, x) = 0 \quad (6)$$

parciální derivací rovnice (5) podle x a (6) podle t dostaneme

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 i(t, x)}{\partial t \partial x} + R \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 i(t, x)}{\partial t^2} + G \frac{\partial i(t, x)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

dalšími jednoduchými úpravami dostaneme parciální diferenciální rovnice 2. řádu (telegrafní rovnice)

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + RG u(t, x) \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 i(t, x)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(t, x)}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} + RG i(t, x) \quad (10)$$

Pro řešení těchto parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu se používá několik různých metod podle oblasti zájmu. Jedním z nejdůležitějších řešení jsou výrazy popisující šíření kruhových kmitočtů na tomto homogenním vedení.

Řešení pro kruhové kmitočty

Vydeme z rovnic (5) a (6)

$$-\frac{du(x)}{dx} = (R + j\omega L)i(x) \quad (11)$$

$$-\frac{di(x)}{dx} = (G + j\omega C)u(x) \quad (12)$$

derivací (11) podle x a dosazením z (12) dostaneme

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - (R + j\omega L)(G + j\omega C)u(x) = 0 \quad (13)$$

a podobně

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} - (R + j\omega L)(G + j\omega C)i(x) = 0 \quad (14)$$

Řešení rovnice bude ve tvaru

$$u(x) = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x} \quad (15)$$

kde γ je tzv. konstanta šíření, kterou získáme řešením charakteristické rovnice.

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (16)$$

Derivací (15) a dosazením do (11) dostaneme rovnici pro proud:

$$i(x) = -\frac{1}{(R + j\omega L)} \frac{du(x)}{dx} \quad (17)$$

$$\frac{du(x)}{dx} = A\gamma e^{\gamma x} - B\gamma e^{-\gamma x} \quad (18)$$

$$i(x) = \frac{A}{Z_0} e^{\gamma x} + \frac{B}{Z_0} e^{-\gamma x} \quad (19)$$

Konstanta Z_0 je charakteristická impedance (**také vlnovou impedanci**) vedení:

$$Z_0 = \frac{(R + j\omega L)}{\gamma} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \quad (20)$$

Konstanty Z_0 a γ jsou sekundární parametry vedení, pro praxi důležitější, než původní výchozí parametry.

Integrační konstanty A a B určíme z okrajových podmínek vedení. Těmi mohou být napětí a proud na počátku vedení, na konci vedení, jejich kombinace atd.

Určení A a B v případě daných podmínek na počátku vedení:

$$U_{poč} = A + B, \quad Z_0 I_{poč} = -A + B$$

Z toho plyne:

$$A = \frac{U_{poč} - Z_0 I_{poč}}{2} \quad (21)$$

$$B = \frac{U_{poč} + Z_0 I_{poč}}{2} \quad (22)$$

Dalšími výpočty podobným způsobem vypočítáme zbývající koeficienty, kterými doplníme rovnice:

$$U(x) = \frac{1}{2}(U_{poč} - Z_0 I_{poč})e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(U_{poč} + Z_0 I_{poč})e^{-\gamma x} \quad (23)$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_0} \frac{(U_{poč} - Z_0 I_{poč})}{2} e^{\gamma x} + \frac{1}{Z_0} \frac{(U_{poč} + Z_0 I_{poč})}{2} e^{-\gamma x} \quad (24)$$

V maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ I(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) & -Z_0 \frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \\ -\frac{1}{Z_0} \frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) & \frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{poč} \\ I_{poč} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ I(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma x) & -Z_0 \sinh(\gamma x) \\ -\frac{1}{Z_0} \sinh(\gamma x) & \cosh(\gamma x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{poč} \\ I_{poč} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Konstantu γ (16) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\gamma = \beta + j\alpha \quad (27)$$

Rozložením na reálnou a imaginární část dostaneme konstantu tlumení β a konstantu fáze α :

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(RG - \omega^2 LC) + \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \quad (28)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 LC - RG) + \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)}} \quad (29)$$

Řešení rovnice (18) je ve tvaru

$$\vec{U}_{(x)} e^{j\omega t} = \vec{A} e^{j\omega t} e^{\gamma x} + \vec{B} e^{j\omega t} e^{-\gamma x} \quad (30)$$

kde $\vec{A} = A e^{j\varphi_1}$ a $\vec{B} = B e^{j\varphi_2}$

Druhý člen rovnice (30)

$$\vec{B} e^{j\omega t} e^{-\gamma x} = B e^{j\varphi_2} e^{-\gamma x} e^{j\omega t} = B e^{-\beta x} e^{j(\varphi_2 - \alpha x)} e^{j\omega t} \quad (31)$$

je rotační vektor s úhlovou rychlostí ω

Člen $B e^{-\beta x}$ určuje tlumení vlny v závislosti na vzdálenosti x . S rostoucím časem se zvětšuje $j\omega t$ a vzrůstá αx tak, aby platilo

$$\varphi_2 - \alpha x + \omega t = konst \quad (32)$$

Rovnice (31) je tedy rovnicí postupné vlny. Rychlost šíření vlny

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{2\pi f}{\text{imag}(\gamma)} \quad (33)$$

Vlnová délka

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad (34)$$

První člen rovnice (30)

$$\vec{A} e^{j\omega t} e^{\gamma x} = A e^{j\varphi_1} e^{\gamma x} e^{j\omega t} = A e^{\beta x} e^{j(\varphi_1 + \alpha x)} e^{j\omega t} \quad (35)$$

je rovnicí vlny postupující zpět, tedy odražené vlny.

Charakteristická admitance je převrácená hodnota charakteristické impedance (20)

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \quad (36)$$

Zavedeme normalizované veličiny

$$z_T = \frac{Z}{Z_0} \quad (37)$$

$$y_T = \frac{Y}{Y_0} \quad (38)$$

Pro vedení nakrátko délky l je $U_k=0$, proto platí z rovnic (26)

$$U_p = I_k Z_0 \sinh \gamma l$$

$$I_p = I_k \cosh \gamma l \quad (39)$$

a pro vstupní impedanci

$$Z_p = \frac{U_p}{I_p} = \frac{I_k Z_0 \sinh \lambda l}{I_k \cosh \lambda l} \quad (40)$$

$$Z_p = Z_0 \operatorname{tgh} \lambda l \quad (41)$$

Uvažujeme náhradu zakončování impedance určitým vedením nakrátko:

$$Z_k = Z_0 \operatorname{tgh} \lambda l \quad (42)$$

$$Z_k = Z_0 \frac{e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}}{e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}} = Z_0 \frac{1 - e^{-2\lambda l}}{1 + e^{-2\lambda l}} \quad (43)$$

Normovaná neboli vztažná impedance

$$z_k = \frac{Z_k}{Z_0} = \frac{1 - e^{-2\lambda l}}{1 + e^{-2\lambda l}} = \frac{1 - e^{-2al - 2jbl}}{1 + e^{-2al - 2jbl}} \quad (44)$$

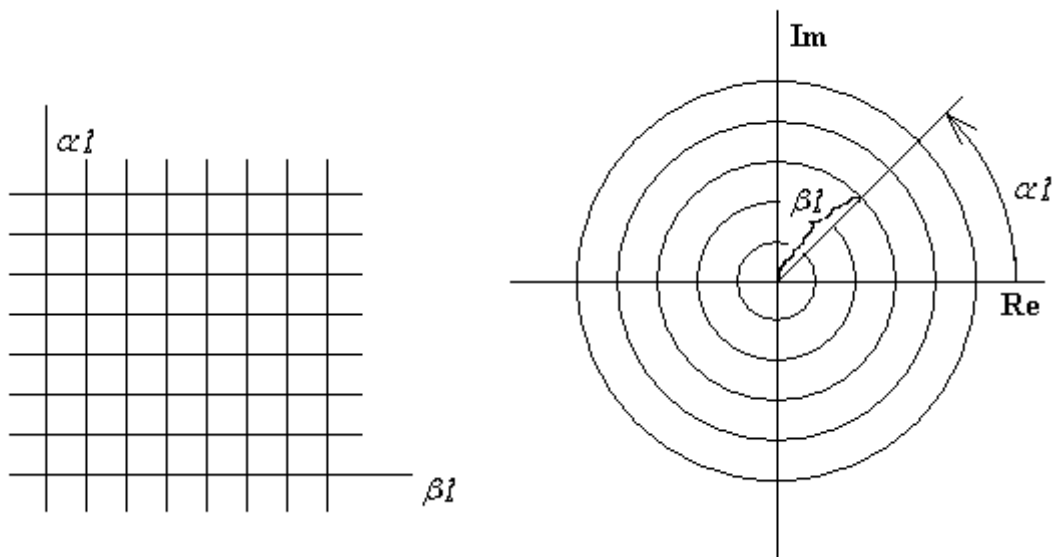
Transformace pomocí konformního zobrazení

Používá jedno z konformních zobrazení, zvané Žukova funkce, v praxi ovšem pod názvem Smithův diagram.

Žukova funkce má tvar:

$$z = \frac{1 - w}{1 + w} \quad (45)$$

Tu lze znázornit graficky na obr.2 a obr3:



Pro ní provedeme substituci

$$w = e^{-2\gamma l} \quad (46)$$

A dále provedeme transformaci

$$w = u + jv; \gamma l = \beta l + j\alpha l \quad (47)$$

Z čehož plyne:

$$e^{-2\gamma l} = w = e^{-2\beta l} (\cos 2\alpha l - j \sin 2\alpha l) \quad (48)$$

a dále

$$u = e^{-2\beta l} \cos 2\alpha l$$

$$v = -e^{-2\beta l} \sin 2\alpha l \quad (49)$$

Takže:

$$u^2 + v^2 = e^{-4\beta l} \quad (50)$$

Pro $\beta l = konst$ to je kružnice v souřadnicích u, v o poloměru $R = e^{-2\beta l}$

Pro druhou souřadnici určíme

$$\frac{v}{u} = -\operatorname{tg} 2\alpha l$$

$$v = -u \operatorname{tg} 2\alpha l \quad (51)$$

Což jsou přímky procházející počátkem (v souřadnicích u, v) se směrnici

$$-\operatorname{tg} 2\alpha l = -\operatorname{tg} 4\pi \frac{l}{\lambda}$$

Poznámka:

Pro porovnání – obecná kružnice se středem m, n a poloměrem R

$$(r - m)^2 + (x - n)^2 = R^2 \Rightarrow r^2 - 2rm + m^2 + x^2 - 2xn + n^2 - R^2$$

Zavedením $z = jx$ dostaneme:

$$z^* = r - jx, zz^* = r^2 + x^2, r = \frac{1}{2}(z + z^*),$$

$$zz^* - z(m - jn) - z^*(m - jn) + m^2 + n^2 - R^2 = 0$$

(konec poznámky)

Transformace konstantních reálných složek odporů zobrazením (45)

Z předešlého víme, že $r = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (52)

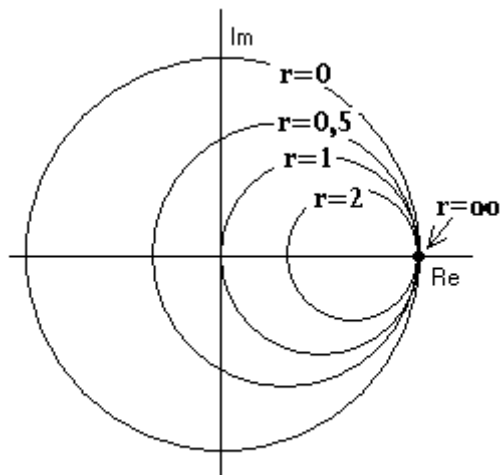
$$2r = \frac{1-w}{1+w} + \frac{1-w^*}{1+w^*} \quad (53)$$

$$ww^* + w \frac{r}{r+1} + w^* \frac{r}{r+1} + \frac{r-1}{r+1} = 0 \quad (54)$$

$$m - jn = \frac{-r}{r+1}, m + jn = \frac{-r}{r+1} \quad (55)$$

$$\Rightarrow m = \frac{-r}{r+1}, n = 0 \quad (56)$$

$$m^2 + n^2 - R^2 = \frac{r-1}{r+1} \Rightarrow R = \frac{1}{r+1} \quad (57)$$

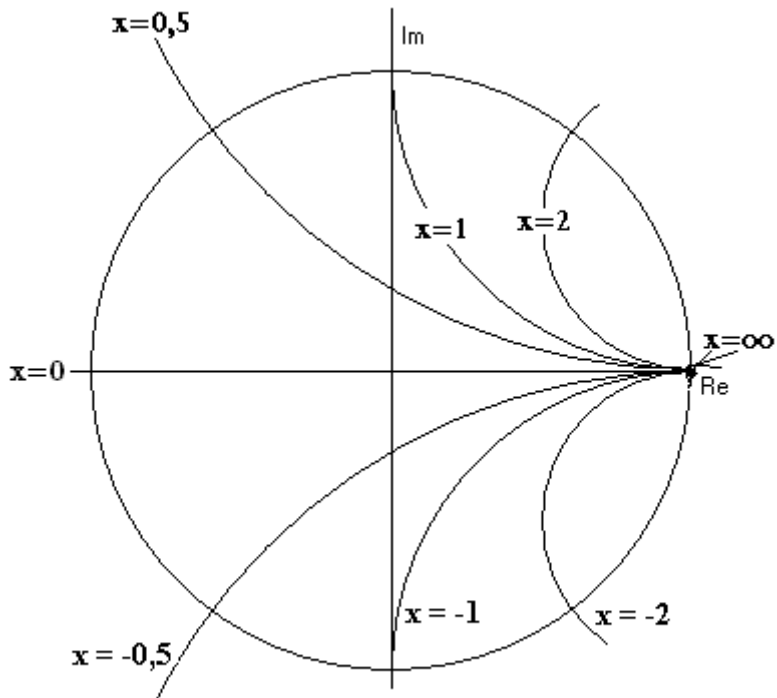


Transformace konstantních reaktancí (imaginárních složek)

$$x = \frac{1}{j2}(z - z^*) \Rightarrow 2jx = \frac{1-w}{1+w} - \frac{1-w^*}{1+w^*} \quad (58)$$

$$m - jn = -\frac{1+jx}{jx} = -1 + j \frac{1}{x} \Rightarrow m = -1, n = -\frac{1}{x} \quad (59)$$

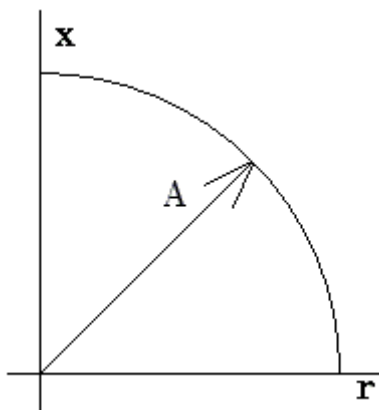
$$m^2 + n^2 - R^2 = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{x} \quad (60)$$



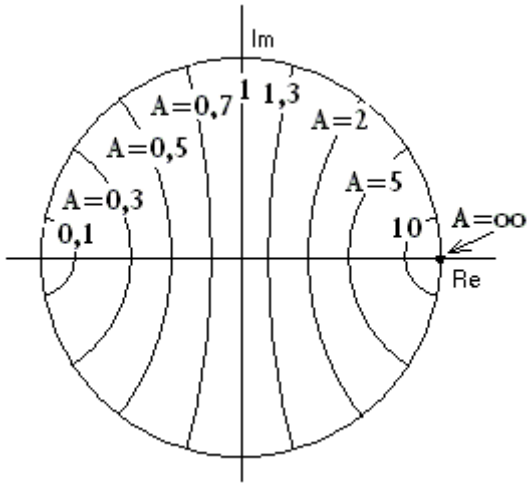
Transformace konstantních absolutních hodnot

Pro konstantní amplitudu platí:

$$zz^* = A^2 \quad (61)$$



$$R = \frac{2A}{A^2 - 1}, m = \frac{A^2 + 1}{A^2 - 1} \quad (62)$$

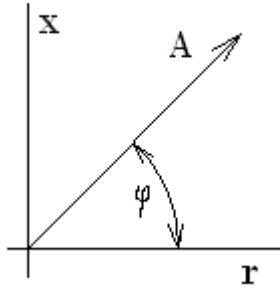


Transformace konstantních fází

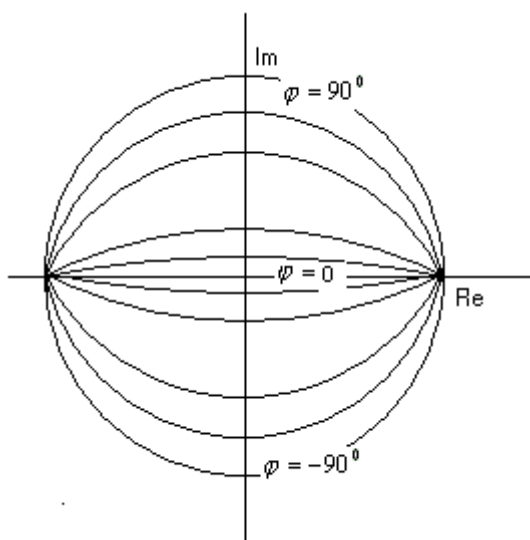
Pro konstantní fázi platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{x}{r} = B \quad (63)$$

$$\frac{z - z^*}{z + z^*} = jB \quad (64)$$



$$R = \frac{\sqrt{B^2 + 1}}{B}, n = -\frac{1}{B} \quad (65)$$



Pokud vedení není zakončeno charakteristickou impedancí, dojde k odrazu vlny postupující po vedení. Tato odražená vlna se šíří od zátěže ke zdroji a proto v jednotlivých místech vedení naměříme kolísající amplitudu napětí a proudů podle toho, jak se v daném místě vedení sčítají složky vlny postupné (dopředné) a odražené. Vzniklá maxima a minima na vedení závisí jen na vlnové délce postupující vlny a jejich velikost na velikosti odražené vlny. Pokud se od zátěže odrazí 100% vlnění, potom na vedení existují místa, kde jsou napětí vlny postupné a odražené stejně velké, ale opačné fáze, takže se odčítají, je zde nulová amplituda a tudíž je poměr maxim a minim nekonečný. Pokud se žádná vlna neodrazí (vedení je zakončeno charakteristickou impedancí), potom je podíl amplitud jakýchkoliv míst na vedení roven jedné. Podíl vlny postupné a odražené nazýváme PSV (poměr stojatých vln) nebo SWR (standing wave ratio). Pokud se na vedení projevuje útlum, působí i na vlnu odraženou a poměr stojatých vln (PSV) se směrem od zátěže ke zdroji zmenšuje.

Podíl vlny dopředné (31) a zpětné (35)

$$\rho = \frac{Be^{-\beta x} e^{j(\varphi_2 - \alpha x)} e^{j\omega t}}{Ae^{\beta x} e^{j(\varphi_2 + \alpha x)} e^{j\omega t}} = Ce^{2\lambda x} \quad (66)$$

nazýváme koeficient odrazu.

Tento komplexní koeficient odrazu můžeme zapsat v normalizovaném tvaru

$$\rho = \rho_0 e^{2j\beta x} \quad (67)$$

Napětí na vedení vyjádříme pomocí vlny postupné a odražené

$$U_F + U_R = U \quad \text{a} \quad U_F - U_R = Z_0 I \quad (68)$$

Dělením rovnic získáme poměr stojatých vln (PSV)

$$\rho = \frac{U_R}{U_F} \quad (69)$$

Dosazením normalizované impedance

$$z_T = \frac{U}{Z_0 I} \quad (70)$$

obdržíme výsledek:

$$z_T = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (71)$$

nebo opačně

$$\rho = \frac{z_T - 1}{z_T + 1} \quad (72)$$

Obě čísla z_T a ρ jsou komplexní.

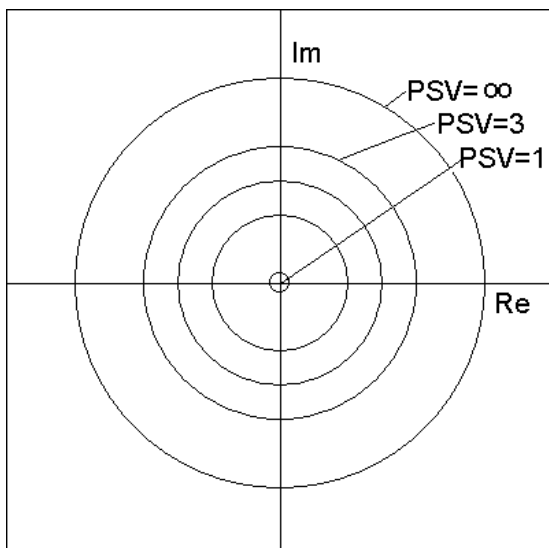
$$z = a + jb \quad (73)$$

$$\rho = c + jd \quad (74)$$

a jejich dosazením obdržíme výsledek:

$$\rho = c + jd = \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a+1)^2 + b^2} + j \left(\frac{2b}{(a+1)^2 + b^2} \right) \quad (75)$$

Tato rovnice vyjadřující komplexní koeficient odrazu může být zobrazena pomocí souboru kružnic.



S myšlenkou kruhového impedančního diagramu přišel poprvé ve třicátých letech dvacátého století Philips H. Smith.

Celý Smithův diagram je ke stažení např.:

<http://ok2buh.nagano.cz/smith/smithzy.pdf>
http://radio.feld.cvut.cz/personal/matejka/download/smith_plain_rx_cz.pdf
<http://www.skvor.cz/pdf/smith.pdf>
<http://fritz.dellsperger.net/>
http://radio.feld.cvut.cz/personal/matejka/download/smith_plain_rx_cz.pdf
http://www.fzu.cz/departments/multilayer/tutorial/Smithuv_diagram.pdf
<http://sss-mag.com/pdf/smithchart.pdf>

Příklady použití Smithova diagramu:

<http://www.fourier-series.com/rf-concepts/smithchart.html>
http://lucy.troja.mff.cuni.cz/~tichy/vfel/01_10.html
<http://lucy.troja.mff.cuni.cz/~tichy/vfel/imageS/1105.gif>
http://sdelovacka.kbx.cz/data/statnice/BEST/18_1.doc
<http://ok2buh.nagano.cz/first/impedance.html>
http://fei1.vsb.cz/kat420/vyuka/fei/sireni_vln/teze/otazka_05.pdf
<http://www.fourier-series.com/rf-concepts/smithchart.html>
<http://fritz.dellsperger.net/>
<http://www.ac6la.com/tldetails.html>
<http://www.amanogawa.com/archive/LossLessSmithChart/LossLessSmithChartWide-2.html>
<http://cgi.www.telestrian.co.uk/cgi-bin/www.telestrian.co.uk/smiths.pl>
<http://www.wirelessnetworksonline.com/download.mvc/CSmith-Interactive-Smith-Chart-V225-0001>
<http://www.objetos-interactivos.es/smith/smith.html>
http://www.absoluteastronomy.com/topics/Smith_chart#encyclopedia